$$D_A = E^{\mu}_A \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + E^{\alpha}_A \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} + E^{\dot\alpha}_A \frac{\partial}{\partial \bar\theta^{\dot\alpha}} + \omega^{BC}_A L_{BC}, \qquad (6)$$

где A — либо векторный, либо спинорный индекс группы Лоренца в касат. пространстве, L_{BC} — её генераторы. Коммутатор двух таких производных (антикоммутатор, если обе спинорные) содержит тензоры кручения T^C_{AB} и кривизны R^{CD}_{AB} (см. *Кривизны тензор*)

$$[D_A, D_B\} = T^C_{AB} D_C.$$

Чтобы довести возникающие из T^C_{AB}, R^{CD}_{AB} (при разложении по θ, $\bar\theta$) многочисленные тензорные величины до нужного и соответствующего физ. полям небольшого числа, на эти тензоры налагают связи [3, 5]. После этого все тензоры кручения и кривизны выражаются через небольшое число независимых величин: киральное суперполе R, $\bar D_{\dot\alpha} R = 0$, вещественное векторное суперполе G^{μ}, киральное суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ и их ковариантные производные. Существенно, что можно разрешить эти связи и выразить все тензоры кручения и кривизны, а также суперреперы и связности через гравитационное суперполе H^{μ} [8, 12]. По сравнению с общей геометрией $\mathbb{R}^{4|4}$ вложение его в $\mathbb{C}^{4|2}$ с помощью H^{μ} порождает определённую комплексную геометрию. Её дальнейшее уточнение (получение ур-ний для H^{μ}) производится на основе вариационного принципа [12].

Принцип наименьшего действия. Для простой С. он имеет ясную геом. интерпретацию: нужно минимизировать инвариантный суперобъём $\mathbb{R}^{4|4}$ [13]. Др. словами, $\mathbb{R}^{4|4}$ есть минимальная гиперповерхность в $\mathbb{C}^{4|2}$. Т. о., действие имеет вид

$$I_{SG} = \frac{1}{\varkappa^2}\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\, E(x, \theta, \bar\theta), \qquad (7)$$

где E — супердетерминант суперрепера E^{μ}_A. Подстановка E^M_A в терминах гравитац. суперполя H^{μ} даёт нужную лагранжеву плотность [12]. Если С. взаимодействует с материей, то следует добавить и суперсимметричное действие для материи:

$$I = I_{SG} + \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\, E L_m(\Phi, D\Phi),$$

где лагранжева плотность L_m получается из соответствующей лагранжевой плотности материи в плоском пространстве путём удлинения ковариантных производных (6). Ур-ния движения получаются варьированием действия по H^{μ}. В суперполях они имеют вид

$$G_{\mu} = \varkappa^2 V_{\mu},$$

где в правой части стоит т. н. суперток. На языке обычных компонентных полей они сводятся к ур-нию Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \varkappa^2 T_{\mu\nu}$$

($R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи), ковариантизованному ур-нию Рариты — Швингера

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\gamma_5 \gamma^{\nu} D^{\lambda} \psi^{\rho})_{\alpha} = \varkappa J_{\alpha\mu}$$

и ур-ниям, фиксирующим вспомогат. поля. Источники $T_{\mu\nu}$ (тензор энергии-импульса) и $J_{\alpha\mu}$ (сохраняющийся ток суперсимметрии) являются компонентами супертока V_{μ}.

Компенсаторы. Действие (7) удобно трактовать след. образом. Если исходить из конформной С., к-рая содержит ещё одну локальную суперсимметрию, а также локальные масштабную и γ_5-симметрии, то березиниан E сам по себе не может быть лагранжевой плотностью, он имеет неподходящий конформный вес. Чтобы компенсировать этот вес, вводят т. н. компенсаторы. Для мин. набора полей компенсатором служит киральное (левое) суперполе $\varphi(x_L, \theta_L)$ [8], преобразующееся при преобразованиях (4) след. образом:

$$\varphi'_L(x'_L, \theta'_L) = \left(\operatorname{Ber} \frac{\partial(x'_L, \theta'_L)}{\partial(x_L, \theta_L)}\right)^{1/3} \varphi(x_L, \theta_L). \qquad (8)$$

Теперь в качестве лагранжевой плотности можно взять $E\varphi\bar\varphi$. С помощью (8) можно обратить компенсатор $\varphi(x_L, \theta_L)$ в единицу. Тогда получится действие (7) с группой инвариантности (4), (5). Так получается мин. версия С. Если в качестве компенсатора взять вместо кирального другие $N=1$ суперполя, то получатся др. версии $N=1$ С. вместо минимальной. В них гравитац. суперполями будут служить и векторное, и спинорное [8].

Историческая справка. Компонентное действие для $N=1$ С. было предложено в 1976 в [1] (первая работа в марте, вторая — в мае). Почти одновременно [2] было найдено линеаризов. действие для гравитационного аксиального суперполя со всеми вспомогат. полями. Вспомогат. поля были восстановлены в рамках компонентного подхода в [10]. Общий геом. подход к $N=1$ С. был развит в [3]. Гравитац. суперполе как мнимая часть координаты x^{μ}_L и соответствующая комплексная геометрия были развиты в [11, 12] (см. также монографию [8]). Замечательно, что компонентное действие для теории со спонтанно нарушенной локальной суперсимметрией было написано ещё в 1973 [4].

Расходимости в простой С. В случае обычной теории тяготения, хотя она и является неперенормируемой, расходимости (в отсутствие материальных связей) возникают начиная с двух петель диаграмм Фейнмана, однопетлевых расходимостей нет. Это можно объяснить на геом. языке из размерных соображений. *Контрчлен* для одной петли был бы квадратичен по тензору Римана. Используя аналог теоремы Гаусса (теорему Гаусса — Бонне), его можно заменить на члены, квадратичные по *Риччи тензорам* и скалярной кривизне. И те и другие, однако, обращаются в ноль на ур-ниях движения.

Аналогичные соображения определяют конечность однопетлевого приближения и в $N=1$ С.: контрчленом могла бы быть только величина $W^{\alpha\beta\gamma} W_{\alpha\beta\gamma}$, но соответствующий член в действии обращается в ноль на ур-ниях движения. Более того, пропадают и двухпетлевые расходимости. Единственный возможный контрчлен здесь также обращается в ноль на ур-ниях движения. Но уже в трёх петлях имеется кандидат в контрчлены и возникают неустранимые трёхпетлевые расходимости.

N=2 супергравитация — простейшая из расширенных. В состав её супермультиплета на массовой поверхности входят гравитон, 2 гравитино и гравифотон ($\lambda = \pm 1$). Её лагранжева плотность состоит из скалярной кривизны, действий для гравитино и гравифотона, получающихся ковариантизацией соответствующих свободных действий, и простых неминимальных членов взаимодействия гравитино с гравифотоном [14, 5]. Она представляет собой первую из теорий С., в принципе объединяющую гравитацию с электромагнетизмом (гравифотон), и содержит 4 фермионные и 4 бозонные степени свободы. Объединение частиц со спинами 2 и 1 оказалось возможным благодаря наличию промежуточной ступени — гравитино со спином $^3/_2$. (Именно этой ступени не хватило А. Эйнштейну в его попытках создания единой теории эл.-магн. и гравитац. полей.)

Действие для физ. полей по построению инвариантно относительно группы общих преобразований координат 4-мерного пространства-времени и относительно локальной группы Лоренца, а также относительно преобразований локальной $N=2$ суперсимметрии. Как и в случае $N=1$, алгебра локальной $N=2$ суперсимметрии на физ. полях замыкается только на массовой поверхности (т. е. на ур-ниях движения). Чтобы добиться её замыкания вне массовой поверхности и чтобы преобразования имели модельно-независимый, универсальный вид, необходимы $N=2$ вспомогат. поля. К 1984 было найдено 3 разл. набора вспомогат. полей [15], каждый из к-рых включает 40 бозонных и 40 фермионных степеней свободы. Они соот-